

УДК 535.42

В.Г. Колобродов, І.О. Кучугура

РОЗРОБКА МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ДИФРАКЦІЙНИХ ЛІНЗ

The purpose of this paper is to develop the calculation method of diffractive lenses with the given transmittance that allows determining structural parameters of diffractive lenses. To this end, we employ the example of one of the options of lenses transmittance. We show that the lens with the same parameter works as a Fresnel zone plate. In addition, we analyze the intensity distribution generated by this plate was analyzed. We show that with the increase of a focus number the focus intensity decreases, while the highest intensity is observed for the main focus. The focuses position depends on the wavelength, bandwidth and the focus number, whilst the intensity depends on a number of bands and the focus position. The bandwidth is determined by the modulation of diffraction lenses and wavelength.

Вступ

Дифракційна лінза (ДЛ) є одним із важливих оптичних елементів, які широко використовуються в оптиці та в інших галузях науки (наприклад, в офтальмологічній хірургії як штучний кришталік ока). ДЛ є фокусатором, основна проблема у створенні якого – досягнення високої енергетичної ефективності при формуванні необхідного розподілу інтенсивності у фокальній площині. Проблемам проектування ДЛ присвячено ряд праць [1–3]. Але в них не знайшли відображення методи визначення конструктивних параметрів ДЛ, які забезпечують заданий розподіл поля в площині спостереження. У статті подано узагальнений метод розрахунку розподілу інтенсивності світла за лінзою з метою визначення конструктивних параметрів лінзи, яка має задану фокусну відстань.

Постановка задачі

Метою статті є розроблення методу розрахунку дифракційних лінз із заданим коефіцієнтом пропускання, який дасть змогу визначити конструктивні параметри дифракційних лінз.

Теорія дифракції Френеля

Нехай на плоский безкінечний непрозорий екран з отвором Σ скінченного розміру падає монохроматична хвиля довжиною λ . З плоским екраном зв'яжемо прямокутну систему координат x, y , а з площиною спостереження – x_0, y_0 (рис. 1). Причому площина спостереження паралельна площині екрану і перебуває від нього на відстані z .

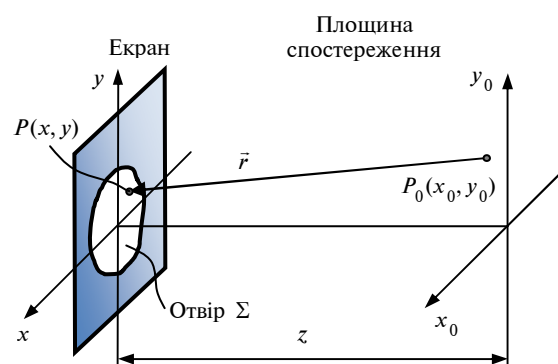


Рис. 1. Схема дифракції Френеля

Згідно з теорією дифракції Френеля [4], амплітуда поля $V(P_0)$ в точці спостереження $P_0(x_0, y_0)$ визначається за формулою

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \times \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy, \quad (1)$$

де $V(x, y)$ – амплітуда поля безпосередньо за екраном. Множник $\exp(jkz)$ визначає постійний фазовий зсув, що не впливає на розподіл поля $V(x_0, y_0)$ і який надалі не враховуємо.

Нехай на екран з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_0(x, y)$ нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди. Тоді розподіл поля безпосередньо за екраном описується функцією $V(x, y) = t_0(x, y)$. За цих умов розподіл поля в площині спостереження x_0, y_0 (1) можна подати у вигляді

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{\lambda z} \exp(jkz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) \times$$

$$\times \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy. \quad (2)$$

Амплітуда поля в центрі дифракційної картини визначається за умови, що $x_0 = y_0 = 0$. Тому інтенсивність у центрі дифракційної картини обчислюється як

$$I(0, 0) = |V(0, 0)|^2. \quad (3)$$

Екран працює як лінза в тому випадку, коли функція (3) набуває максимального значення. Для знаходження розподілу інтенсивності у фокусі ДЛ необхідно підставити (2) у формулу (3) та визначити максимальне значення інтеграла при $z = f$.

Метод розрахунку конструктивних параметрів ДЛ

Розглянемо ДЛ, яка має амплітудний коефіцієнт пропускання (рис. 2)

$$t_0(r) = \frac{1}{2} [1 + \text{sng}(\cos(\alpha r^2))] \text{circ}\left(\frac{r}{l}\right), \quad (4)$$

де

$$\text{sng}(z) = \begin{cases} 1, & \text{коли } z > 0, \\ 0, & \text{коли } z = 0, \\ -1, & \text{коли } z < 0, \end{cases} \quad \text{— функція знаку;}$$

$$\text{circ}\left(\frac{r}{l}\right) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq r \leq l, \\ 0, & \text{коли } r > l, \end{cases} \quad \text{— кругова функція}$$

(l — радіус ДЛ).

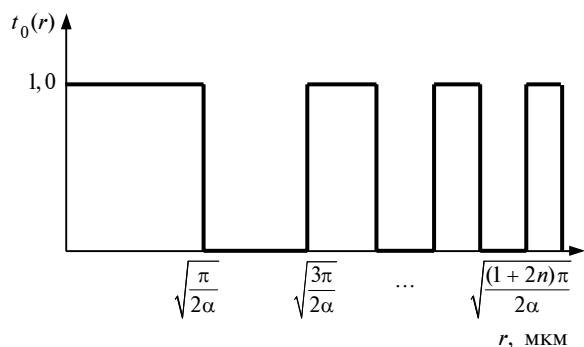


Рис. 2. Амплітудний коефіцієнт пропускання зонної пластинки Френеля

Екран, що розглядається, називається *зонною пластинкою Френеля*. Знайдемо область існування функції знаку:

$$\text{sng}(\cos(\alpha r^2)) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{коли } r \in \left(0; \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(3+4n)}; \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(5+4n)}\right), \\ 0, & \text{коли } r = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(1+2n)}, \\ -1, & \text{коли } r \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(1+4n)}; \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(3+4n)}\right). \end{cases}$$

У зв'язку з цим амплітудний коефіцієнт пропускання (4) зонної пластинки Френеля має вигляд

$$t_0(r) = \begin{cases} 1, & \text{коли } r \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(3+4n)}; \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(5+4n)}\right) \\ \text{і } 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}, r \leq l, \\ 0, & \text{коли } r \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(1+4n)}; \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(3+4n)}\right), \\ r \leq l. \end{cases} \quad (5)$$

Визначимо амплітуду поля в центрі дифракційної картини від n -ої зони Френеля. Для цього підставимо (5) до інтеграла (2):

$$V_n(0, 0) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{S_n} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [x^2 + y^2] \right\} dx dy, \quad (6)$$

де S_n — площа n -го кільця зони Френеля.

Перейдемо в інтегралі (6) до полярної системи координат $\rho^2 = x^2 + y^2$; $dx dy = \rho d\rho d\varphi$; $r_{n1} < \rho < r_{n2}$; $0 < \varphi < 2\pi$, де r_{n1}, r_{n2} — радіуси n -ої зони Френеля.

Тоді інтеграл (6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} V_n(r, \varphi) &= V_n(r) = V_n(0) = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{r_{n1}}^{r_{n2}} \int_0^{2\pi} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} \rho^2 \right) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_{n1}^2 \right) - \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_{n2}^2 \right). \end{aligned}$$

Розглянемо окремо два випадки.

$$1. \ r \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(3+4n)}; \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}(5+4n)} \right). \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned}
 V_n(0) &= \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_{n1}^2\right) - \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_{n2}^2\right) = \\
 &= \exp\left[j \frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha} (3 + 4n)\right] \left[1 - \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}\right)\right] = \\
 &= B \exp\left[j \frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha} (3 + 4n)\right],
 \end{aligned}$$

де $B = 1 - \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}\right)$.

2. $0 < r < \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$. Тоді

$$\begin{aligned}
 V_1(0) &= \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_{m1}^2\right) - \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_{n2}^2\right) = \\
 &= 1 - \exp\left(j \frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right) = A.
 \end{aligned}$$

Визначимо кількість прозорих смуг N , при умові, що круга зіниці збігається з більшим радіусом останнього прозорого кільця. У цьому випадку

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} (5 + 4n) = l,$$

звідки

$$N = \frac{\alpha}{2\pi} l^2 - \frac{5}{4}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо результуючу амплітуду поля, утворену внаслідок інтерференції хвиль від N зон:

$$\begin{aligned}
 V(0) &= V_1(0) + \sum_{n=0}^N V_n(0) = A + B \sum_{n=0}^N V_n(0) = \\
 &= A + B \sum_{n=0}^N \exp\left[j \frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha} (3 + 4n)\right] = \\
 &= A + B \exp\left(j \frac{3\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right) \times \\
 &\times \left[1 + \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} \cdot 2\right) + \dots + \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} \cdot 2N\right)\right]. \\
 \text{Ряд } &\left[1 + \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} \cdot 2\right) + \dots + \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} \cdot 2N\right)\right]
 \end{aligned}$$

являє собою геометричну прогресію, сума якої дорівнює

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^N \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} 2n\right) = \\
 &= \frac{\exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} N\right) \sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} (N + 1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}\right)}.
 \end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}
 V(0) &= 1 - \exp\left(j \frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right) + \left[1 - \exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}\right)\right] \times \\
 &\times \exp\left(j \frac{3\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right) \frac{\exp\left(j \frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} N\right) \sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} (N + 1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}\right)} = \\
 &= -2j \exp\left(j \frac{\pi^2}{4\lambda z \alpha}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi^2}{4\lambda z \alpha}\right) + \right. \\
 &\left. + \frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} (N + 1)\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right)} \exp\left(j \frac{\pi^2 (4N + 7)}{4\lambda z \alpha}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Знайдемо інтенсивність світла вздовж оптичної осі:

$$\begin{aligned}
 I(0, z) &= |V(0, z)|^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\pi^2}{4\lambda z \alpha}\right) + \\
 &+ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} (N + 1)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right)} + 4 \sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha} (N + 1)\right) \times \\
 &\times \cos\left(\frac{\pi^2 (4N + 7)}{4\lambda z \alpha}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}\right)}{\cos\left(\frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right)}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Максимальне значення функції (7) визначається другим доданком, тобто

$$I_{\max}(0, z) = |V(0)|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi^2}{\lambda z \alpha}(N+1)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right)}. \quad (8)$$

Із співвідношення (8) маємо, що ДЛ (4) має багато фокусів, які визначаються з умови, що функція (8) набуває свого максимального значення, коли знаменник прямує до нуля, тобто $\cos^2\left(\frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha}\right) \rightarrow 0$ або $\frac{\pi^2}{2\lambda z \alpha} = \frac{\pi}{2} + m\pi$. Звідси маємо

$$f_m = z = \frac{\pi}{\lambda \alpha (1 + 2m)}. \quad (9)$$

Дослідження розподілу інтенсивності, сформованого зонною пластинкою Френеля

Визначимо інтенсивність світла в m -му фокусі. Для цього підставимо (9) в (7):

$$I(0, f_m) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4(1+2m)}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{1+2m}(N+1)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2(1+2m)}\right)} + 4 \sin\left(\frac{\pi}{1+2m}(N+1)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4(1+2m)}(4N+7)\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{1+2m}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2(1+2m)}\right)}. \quad (10)$$

Аналіз функції (10) показує, що зі збільшенням номера фокуса m інтенсивність у фокусі f_m зменшується. Найбільша інтенсивність буде спостерігатися для головного фокуса, коли $m = 0$.

Розглянемо залежність інтенсивності світла від кількості прозорих смуг N у зонній пластинці Френеля для головного фокуса f_0 , коли $m = 0$. Побудуємо графіки функції $I(N, f_m)$ (7) для кількості смуг $N = \{3; 4; 5\}$ (рис. 3). Задамо початкові умови: $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-3}$ мм, $\alpha = 10$ мм⁻¹.

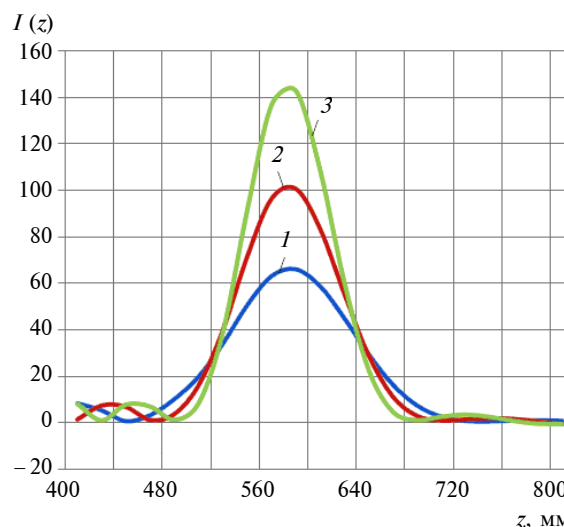


Рис. 3. Розподіл інтенсивності в головному фокусі пластинки Френеля залежно від кількості зон N для головного фокуса $f_0 = 570$ мм: 1 – $N = 3$, 2 – $N = 4$, 3 – $N = 5$

Як видно з рис. 3, чим більша кількість смуг N , тим більше енергії концентрується в фокусі і не розмивається вздовж осі. З отриманих даних можна зробити висновок, що для зонної пластинки Френеля положення фокусів залежить від довжини хвилі λ , ширини смуг, що задається параметром α , і номера фокуса m , а інтенсивність залежить від кількості смуг N і номера фокуса m .

Отже, положення фокусів залежить від гармонік, з яких складається коефіцієнт пропускання міри $t_0(r) = \frac{1}{2}[1 + \text{sng}(\cos(\alpha r^2))]\text{circ}\left(\frac{r}{l}\right)$,

і основна енергія сконцентрована в головному фокусі $m = 0$, що відповідає першій гармоніці.

Формула (9) дає можливість визначити параметр зонної пластинки α , який забезпечує задану фокусну відстань:

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda f_0}.$$

Звідси маємо, що цей параметр буде змінюватись залежно від довжини хвилі, тобто зонна пластинка Френеля має значні хроматичні аберації.

Висновки

У статті подано метод розрахунку ДЛ, який дає змогу визначити конструктивні пара-

метри лінзи із заданою фокусною відстанню. Ці параметри дають можливість забезпечити заданий розподіл поля в площині спостереження.

Аналіз розподілу інтенсивності, сформованого зонною пластинкою Френеля, показав, що зі збільшенням номера фокуса інтенсивність у фокусі зменшується. Найбільша інтенсивність буде спостерігатися для головного фокуса, коли $m = 0$, причому зі збільшенням кількості смуг (діаметра лінзи $2l$) збільшується концентрація енергії в фокусі і вона менше розмивається вздовж оптичної осі.

Положення фокусів залежить від довжини хвилі, ширини смуг і номера фокуса, а інтенсивність залежить від кількості смуг і положення фокуса. В свою чергу ширина смуг визначається параметром модуляції α пропускання ДЛ і довжиною хвилі.

У подальшому необхідно вдосконалювати запропонований метод для синтезу конструктивних параметрів ДЛ, які б забезпечували заданий просторовий розподіл інтенсивності світла у фокусі лінзи.

1. *Diffraction Optics: Design, Fabrication, and Test* / D.C. O'Shea, T.J. Suleski, A.D. Kathman, D.W. Prather. — Washington: SPIE-Press, 2004. — 254 p.
2. *Дифракционная компьютерная оптика* / Под ред. В.А. Сойфера. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 736 с.
3. Bao N.K., Chen Zhongyu, Chen Yansong. Adjacent sequence iteration method for designing a diffractive element with function of long focal depth // *Optical Engineering*. — 2004. — **43**, N 10. — P. 2348–2352.
4. Колобродов В.Г., Тимчик Г.С. Дифракційна теорія оптичних систем. — К.: НТУУ "КПІ", 2011. — 140 с.

Рекомендована Радою
приладобудівного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
5 жовтня 2011 року